Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University – Journal of Science and Engineering
https://dergipark.org.tr/tr/pub/akufemubid

Araştırma Makalesi / Research Article
e-ISSN: 2149-3367 **DOI: https://doi.org/10.35414/akufemubid.1711104**
AKÜ FEMÜBİD **26** (2026) 011302 (57-63) AKU J. Sci. Eng. **26** (2026) 011302 (57-63)

F-Dizisellik ve F-Süreklilik Üzerine Bir Çalışma

A Study on F-Sequentiality and F-Continuity

Makale Bilgisi / Article Info
Alındı/Received: 31.05.2025
Kabul/Accepted: 26.08.2025
Yayımlandı/Published: 03.02.2026

İsmail OSMANOĞLU*

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Sandıklı Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü, Afyonkarahisar, Türkiye

© 2026 The Authors | Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 (CC BY-NC) International License

Öz

Bu çalışmada, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı bir filtre F aracılığıyla tanımlanan genelleştirilmiş bir yakınsaklık yöntemi olan F-yakınsaklığı düzgün uzaylar bağlamında inceliyoruz. F-dizisel uzaylar ve F-süreklilik kavramlarını tanıtarak, klasik kavramları filtre tabanlı yakınsaklıkla genişletiyoruz. Ayrıca, F(I)-yakınsaklık gibi diğer genelleştirilmiş yöntemlerle olan ilişkiler de ele alınmaktadır. Elde edilen sonuçlar, standart topolojik yapılar dışında kalan dizilerin ve fonksiyonların yakınsaklık davranışını anlamak için birleşik bir yaklaşım sunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: *F-yakınsaklık; F-dizisel uzay; F-süreklilik; İstatistiksel yakınsaklık, Düzgün uzaylar.*

Abstract

We study F-convergence, a generalized convergence method defined via a filter F on $\mathbb{N}$, in the setting of uniform spaces. We introduce F-sequential spaces and F-continuous functions, extending classical notions through filter-based convergence. Relationships with other generalized methods, such as $F(\mathrm{I})$-convergence, are also examined. Our results offer a unified approach to understanding convergence behavior of sequences and functions beyond standard topological frameworks.

Keywords: *F-convergence; F-sequential space; F-continuity; F-convergence; Statistical convergence; Uniform spaces*

1. Giriş

Yakınsaklık yapılarının incelenmesi, genel topoloji ve analizde temel bir araştırma alanı olagelmiştir. Ancak klasik dizisel yakınsaklık kavramı, özellikle metrik olmayan uzaylarda topolojik özellikleri açıklamada yetersiz kalabilmektedir. Bu sınırlılıkların üstesinden gelebilmek amacıyla, daha genel ve esnek yapıların geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bundan dolayı, özellikle klasik yakınsaklık tanımının ötesine geçebilen yaklaşımlar, yakınsaklık kavramını farklı matematiksel bağlamlarda yeniden ele alma gereğini ortaya koymaktadır.

Filtreler aracılığıyla tanımlanan yakınsaklık türleri, klasik yapılara göre belirgin avantajlar sunar. Bu yapı, yalnızca belirli alt dizilerin değil, daha genel indeks kümelerinin dikkate alınmasına imkân tanıyarak farklı yakınsaklık türlerinin tek bir çerçevede ele alınmasını sağlar. Özellikle, klasik yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık gibi farklı türlerin ortak bir yapıya indirgenebilmesi, bu yaklaşımın esnekliğini ve kapsayıcılığını ortaya koyar. Ayrıca filtreler, topolojik olmayan ortamlarda da yakınsaklık analizi yapılmasına olanak vererek kuramın uygulanabilirliğini genişletir.

Bu bağlamda, özellikle ideal yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve I-yakınsaklık gibi türler literatürde önemli bir ilgi görmüştür. Fast (1951) ve Steinhaus (1951) tarafından başlatılan istatistiksel yakınsaklık kuramı, daha sonra Kostyrko ve arkadaşları (2000, 2005) ile Das ve Ghosal (2011), Das (2012) ve Das vd. (2016) tarafından hem metrik hem de topolojik uzaylarda genişletilmiş ve çeşitli kavramsal yapılara uygulanmıştır. Bu çalışmalar, I-yığılma noktası, süreklilik ve bölüm fonksiyonları gibi yapılar üzerinde etkili olmuş ve genelleştirilmiş yakınsaklık kuramının gelişiminde önemli rol oynamıştır.

Buradan hareketle, F-yakınsaklık kavramı, doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir filtre yardımıyla klasik dizisel yakınsaklık tanımını genelleştiren bütünleşik bir çerçeve sunmaktadır. Filtrenin yapısına bağlı olarak, örneğin Fréchet filtresi seçildiğinde klasik yakınsaklık, yoğunluğu sıfır olan kümelerle ilişkili filtre seçildiğinde ise istatistiksel yakınsaklık elde edilmektedir. Bu yaklaşım, yalnızca yakınsaklık değil, aynı zamanda dizisellik ve süreklilik gibi temel kavramların da filtre perspektifiyle yeniden tanımlanmasına olanak tanımaktadır. Bu çalışmada, bu yapıların düzgün uzaylar üzerindeki davranışı sistematik biçimde incelenmektedir.

Bu çalışmada, düzgün uzaylar bağlamında F-yakınsaklık kavramı ve bu kavrama bağlı olarak tanımlanan F-dizisel uzaylar ile F-sürekli fonksiyonlar ayrıntılı biçimde ele alınmaktadır. Sunulan tanım ve teoremler, ilgili ispatlarla desteklenerek bu yapıların düzgün uzaylardaki davranışı ortaya konulmakta ve filtre temelli yaklaşımın kuramsal

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: İsmail OSMANOĞLU e-posta/e-mail: ismailosmanoglu@yahoo.com

gücü vurgulanmaktadır. Böylece klasik dizisel yakınsaklığın ötesinde, topolojik olmayan ya da zayıf topolojik yapılar için de geçerli olabilecek bir yakınsaklık kuramı oluşturulması hedeflenmektedir.

Filtreler ve idealler hakkında temel kavramlar ve ayrıntılı bilgiler Kelley (1975) ve Bourbaki (1989) kaynaklarında bulunabilir. Şimdi, bu çalışmada kullanacağımız kavramları kısaca sunalım.

$I \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir küme ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, I bir ideal olarak adlandırılır:

i. $\emptyset \in I$;
ii. $A, B \in I$ ise $A \cup B \in I$;
iii. $A \in I$ ve $B \subset A$ ise $B \in I$.

Bir ideal I, $I \neq \emptyset$ ve $I \neq \mathbb{N}$ olması durumunda trivial olmayan (non-trivial) ideal olarak adlandırılır. Trivial olmayan bir ideal I, eğer $\{n\} \in I$ olacak şekilde tüm $n \in \mathbb{N}$ için tek ögeli kümeleri içeriyorsa, admissible (uygun) ideal olarak adlandırılır.

$F \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir küme ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, F bir filtre olarak adlandırılır:

1. $\emptyset \notin F$;
2. $A, B \in F$ ise $A \cap B \in F$;
3. $A \in F$ ve $A \subset B$ ise $B \in F$.

Aşağıdaki koşulu sağlayan bir filtre F, *ultrafiltre* olarak adlandırılır:

4. Her $A \subseteq \mathbb{N}$ için, ya $A \in F$ ya da $\mathbb{N}\backslash A \in F$.

F bir filtre ise, $F^* = \{\mathbb{N}\backslash A : A \in F\}$ kümesine, F'nin *dual ideali* denir.

$I \subset 2^{\mathbb{N}}$ trivial olmayan bir idealdir ancak ve ancak $F(I) = \{\mathbb{N}\backslash A : A \in I\}$ bir filtredir.

$X \times X$ üzerinde tanımlı bir filtre $\mathcal{U}$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, $\mathcal{U}$ bir *düzgünlük* (uniformity) ya da *düzgün yapı* olarak adlandırılır:

a) $\Delta_X \subseteq U$ her $U \in \mathcal{U}$ için, burada $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$.
b) $U \in \mathcal{U}$ ise, $U^{-1} \in \mathcal{U}$, burada $U^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in U\}$.
c) $U \in \mathcal{U}$ için, $V \in \mathcal{U}$ olacak şekilde $V^2 \subseteq U$ sağlanır. Burada $V^2 = V \circ V$ ve $U \circ V = \{(x,y) \in X \times X : \exists z \in X$ öyle ki $(x,z) \in U, (z,y) \in V\}$.

$(X, \mathcal{U})$ çifti, *düzgün uzay* olarak adlandırılır. $\mathcal{U}$ öğeleri $X \times X$ üzerinde *çevre* (entourage) olarak adlandırılır.

$\mathcal{U}$ düzgünlüğü için bir *baz* olan $\mathcal{V}$ altkümesi, her $U \in \mathcal{U}$ için $\mathcal{V}$'de bir V içeriyorsa, baz olarak adlandırılır.

Eğer $U = U^{-1}$ ise, U simetrik olarak adlandırılır. $\mathcal{U}$'nün tüm simetrik elemanlarının koleksiyonu $\mathcal{U}$ için bir baz oluşturur.

Her $x \in X$, $A \subseteq X$ ve $U \subseteq X \times X$ için, $U[x] = \{y \in X : (x,y) \in U\}$ ve $U[A] = \bigcup_{x \in A} U[x]$ olarak tanımlanır. $\mathcal{U}$ düzgünlüğü altında, $\mathcal{U}[x] = \{U[x] : U \in \mathcal{U}\}$, X üzerinde bir filtre oluşturur ve her $x \in X$ için $x \in U[x]$ sağlanır.

$\mathcal{U}$ düzgünlüğü altında, $U[x_0]$ kümeleri $x_0 \in X$ için bir topoloji $\tau_{\mathcal{U}}$'nün komşuluk bazını oluşturur. Bu topoloji aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\tau_{\mathcal{U}} = \{O \subseteq X : \text{her } x \in O \text{ için } U[x] \subseteq O \text{ olacak şekilde } U \in \mathcal{U} \text{ vardır}\}.$$

$(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayı, eğer $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta_X$ sağlanıyorsa, Hausdorff'tur.

$A \subseteq \mathbb{N}$ için, $A(n)$ kümesi,

$$A(n) = \{k \in A : k \leq n\}$$

biçiminde tanımlanır.

A kümesinin doğal (veya asimptotik) yoğunluğu,

$$\delta(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{|A(n)|}{n},$$

biçiminde tanımlanır (eğer limit varsa). Bu değer $[0,1]$ aralığında yer alır. Sonlu kümeler için doğal yoğunluk sıfırdır. $\delta(A) = 1$ ise, A kümesine istatistiksel olarak yoğun denir. Ayrıca, herhangi bir $A \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\delta(\mathbb{N}\backslash A) = 1 - \delta(A)$$

eşitliği geçerlidir.

Bir topolojik uzay X'teki $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, $x \in X$ noktasına istatistiksel olarak yakınsak ise, her x komşuluğu U için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U\}) = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda, $st\text{-}\lim x_n = x$ veya $x_n \xrightarrow{st} x$ yazılır. Eğer X bir birinci sayılabilir uzay ise, bu yakınsaklık, $\delta(A) = 1$ olan bir $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi ve $(x_n)_{n \in A} \to x$ olacak şekilde bir alt dizinin varlığına denktir (Di Maio ve Kocinac 2008).

2. Filtreler Yoluyla Yakınsaklık ve Dizisellik

Bu bölümde, düzgün uzaylarda F-yakınsaklık, I-yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkileri inceliyoruz.

2.1. F-Yakınsaklık

Tanım 2.1.1. *I, $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde* trivial *olmayan bir ideal ve (x_n), $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisinin $x \in X$ noktasına I-yakınsak olduğu, her $U \in \mathcal{U}$ komşuluk için $A_U = \{n \in \mathbb{N} : (x_n, x) \notin U\}$ kümesinin I'ye ait olması durumunda söylenir. Bu durum $I\text{-}\lim x_n = x$ veya $x_n \xrightarrow{I} x$ şeklinde gösterilir* (Lahiri ve Das 2007).

Tanım 2.1.2. *F, $\mathbb{N}$ üzerinde bir filtre olsun. (x_n) dizisi, $(X,\mathcal{U})$ düzgün uzayında $x \in X$ noktasına her $U \in \mathcal{U}$ için $B_U = \{n \in \mathbb{N}: (x_n, x) \in U\}$ kümesi F'ye aitse, F-yakınsak olarak adlandırılır. Bu durum $F\text{-}\lim x_n = x$ veya $x_n \xrightarrow{F} x$ şeklinde gösterilir* (Bilalov ve Nazarova 2016).

Örnek 2.1.3. $\mathbb{N}$ üzerinde $F = F_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N}: \delta(A) = 1\}$ istatistiksel filtresini göz önüne alalım.
$X = \mathbb{R}$ ve (x_n) dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{eğer } n \text{ asal,} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu dizi klasik anlamda yakınsak değildir. Ancak, bu dizi F-yakınsak açısından incelendiğinde, $x = 1$ noktasına F-yakınsak olduğu görülür. Bunu göstermek için herhangi bir $\epsilon > 0$ için $U = (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ komşuluğunu ele alalım. Dizinin U dışında kalan terimleri, yani $x_n \notin U$ olan n değerleri yalnızca asal sayılardır. Asal sayıların doğal yoğunluğu 0 olduğundan, asal sayıların oluşturduğu kümenin tümleyeni, yani U içinde kalan indekslerin kümesi doğal yoğunluğu 1 olan bir kümedir. Dolayısıyla, bu tümleyen küme filtreye aittir ve sonuç olarak (x_n) dizisi $x = 1$ noktasına F-yakınsaktır

Teorem 2.1.4. *I, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal ve $F(I)$ onun dual filtresi olsun. O halde, $(X,\mathcal{U})$ düzgün uzayında herhangi bir (x_n) dizisi ve $x \in X$ noktası için, dizi x'e I-yakınsaktır ancak ve ancak $F(I)$-yakınsaktır.*
İspat. (x_n) dizisi x'e I-yakınsak olsun. O halde her $U \in \mathcal{U}$ için

$$A_U = \{n \in \mathbb{N}: (x_n, x) \notin U\} \in I.$$

Böylece tümleyeni

$$B_U = \{n \in \mathbb{N}: (x_n, x) \in U\} = \mathbb{N}\backslash A_U \in F(I)$$

olur. Bu da (x_n) dizisinin $F(I)$-yakınsak olduğunu gösterir. Tersi durumda, (x_n) dizisi $F(I)$-yakınsaksa her $U \in \mathcal{U}$ için

$$B_U = \{n \in \mathbb{N}: (x_n, x) \in U\} \in F(I)$$

ve dolayısıyla tümleyeni

$$A_U = \mathbb{N}\backslash B_U \in I$$

olur. Bu da (x_n) dizisinin I-yakınsak olduğunu gösterir. □

Lemma 2.1.5. *$F \subseteq G$ olmak üzere $\mathbb{N}$ üzerinde iki filtre olsun. Eğer (x_n) dizisi $(X,\mathcal{U})$ düzgün uzayında G-yakınsaksa, aynı zamanda F-yakınsaktır.*
İspat. $U \in \mathcal{U}$ alınsın. (x_n) dizisi G-yakınsak olduğundan,

$$A = \{n \in \mathbb{N}: (x_n, x) \in U\} \in G.$$

$F \subseteq G$ olduğu için $A \in F$ olur. Böylece (x_n), F-yakınsaktır. □

Teorem 2.1.6. *F, $\mathbb{N}$ üzerinde bir filtre olsun. $(X,\mathcal{U})$ düzgün uzayında (x_n) dizisi x'e F-yakınsaktır ancak ve ancak $F \subseteq G$ olacak şekilde her maksima filtre (yani ultrafiltre) G için G-yakınsaktır.*
İspat. (x_n) dizisi F-yakınsak ve $F \subseteq G$ olan bir ultrafiltre G alındığında, önceki lemmaya göre $x_n \xrightarrow{G} x$ olur.
Şimdi, (x_n) dizisi her $G \supseteq F$ ultrafiltre için x'e G-yakınsak olsun. $U \in \mathcal{U}$ alalım.

$$A = \{n \in \mathbb{N}: (x_n, x) \in U\}$$

olsun. Diyelim ki $A \notin F$. O zaman $\mathbb{N}\backslash A \in F^c$. Lemma 2.1.5 ile $F \subseteq G$ olan bir ultrafiltre G vardır ve $\mathbb{N}\backslash A \in G$ olur. Bu da $A \notin G$ ve dolayısıyla (x_n) dizisi x'e G-yakınsak değildir, ki bu bir çelişkidir. □
$\text{İ}_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N}: \delta(A) = 0\}$ doğal yoğunluğu sıfır olan kümeler ideali ve $F_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N}: \delta(A) = 1\}$ doğal yoğunluğu bir olan kümeler filtresi olsun.

Teorem 2.1.7. *(x_n), $(X,\mathcal{U})$ düzgün uzayında bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere, aşağıdakiler denktir:*

1. *(x_n) dizisi x'e istatistiksel olarak yakınsaktır,*
2. *(x_n), I_δ-yakınsaktır,*
3. *(x_n), F_δ-yakınsaktır.*

İspat. (1) ⇔ (2): İstatistiksel yakınsaklık tanımına göre

$$\delta(\{n \in \mathbb{N}: (x_n, x) \notin U\}) = 0 \Leftrightarrow \{n: (x_n, x) \notin U\} \in I_\delta.$$

(2) ⇔ (3): Genel olarak Teorem 2.1.4 sonucuna göre, I-yakınsaklık ile $F(I)$-yakınsaklık denktir. Bu durumda $F_\delta = F(I_\delta)$ olur. □

2.2. F-Dizisel Uzay

Dizisel uzay kavramı, topolojik ve düzgün yapıları dizi yakınsaması açısından anlamada temel bir rol oynar. Bu tür uzaylarda bir kümenin kapanışı, o küme içindeki dizilerin limitleri altında elde edilen kapanış ile örtüşür. *F*iltre yakınsamasına dayalı genellemelerden esinlenerek, bu fikrin düzgün uzaylar bağlamında bir uzantısını ele alıyoruz. $\mathbb{N}$ üzerinde bir filtre F verildiğinde, düzgün uzaylarda F-dizisel uzaylar kavramını tanımlıyoruz. Bu tanım, sıradan ve istatistiksel dizisel uzaylar gibi birçok iyi bilinen durumu birleştirir.

Tanım 2.2.1 F, $\mathbb{N}$ üzerinde bir filtre ve X bir düzgün uzay olsun.

- $A \subseteq X$ kümesi, eğer $(x_n) \subseteq A$ olan her dizi için $x_n \xrightarrow{F} x \in X$ yakınsaması $x \in A$ olmasını sağlıyorsa, F-kapalı olarak adlandırılır.
- $U \subseteq X$ kümesi, $X\backslash U$ kümesi F-kapalı ise, F-açık olarak adlandırılır.
- X uzayı, eğer her F-kapalı altküme aynı zamanda kapalıysa, F-dizisel uzay olarak adlandırılır.

Alternatif olarak, $U \subseteq X$ kümesi, $X\backslash U$ kümesinde yer alan hiçbir dizinin F-limiti U içinde yer almıyorsa, F-dizisel olarak açık kabul edilir. Bu kavramın yukarıdaki tanımla eşdeğer olduğu kolayca doğrulanabilir.

Önerme 2.2.2. X bir düzgün uzay ve F, $\mathbb{N}$ üzerinde bir filtre olsun. O halde:

1. X, ancak ve ancak X'teki her F-açık küme standart topolojide de açıksa, F-diziseldir.
2. X'in her kapalı (sırasıyla açık) altkümesi F-kapalı (sırasıyla F-açık)dır.
3. X'in her F-kapalı (sırasıyla F-açık) altkümesi dizisel olarak kapalı (sırasıyla dizisel olarak açık)tır.
4. Eğer $F = F_f$ (Fréchet filtresi, yani yalnızca sonlu tümleyeni olan altkümelerden oluşan filtre; klasik yakınsaklık filtresi olarak bilinir) ise, F-yakınsama sıradan yakınsamaya karşılık gelir ve dolayısıyla her F-dizisel uzay sıradan anlamda diziseldir.
5. Eğer $F = F_\delta$ (istatistiksel filtre ise, her F-dizisel uzay istatistiksel olarak diziseldir (bkz. Di Maio ve Kocinac (2008).

İspat. (1) X'in F-dizisel olduğunu varsayalım. Tanım gereği, F-açık kümeler, F-yakınsayan dizilerin sonunda içinde kaldığı kümelerdir. F-dizisel uzaylarda dizisel kapanış, açık kümelerin kapanışıyla örtüştüğü için her F-açık küme standart topolojide açıktır.

Tersine, her F-açık küme açıksa, F-yakınsama tarafından oluşturulan dizisel yapı X'in topolojisiyle örtüşür. Bu durumda X F-diziseldir.

(2) $A \subseteq X$ kapalı bir küme olsun. $x \in X\backslash A$ için x'in A ile kesişmeyen açık bir komşuluğu vardır. Bu komşuluk açıksa, tanım gereği veya (1) maddesine göre F-açıktır. Dolayısıyla A'nın tümleyeni F-açık, A ise F-kapalıdır. Açık kümeler için benzer argüman geçerlidir.

(3) $A \subseteq X$ F-kapalı olsun. Eğer (x_n) dizisi F-yakınsamayla $x \notin A$'ya yakınsıyorsa, A F-kapalı olduğundan x_n dizisi sonunda A dışında kalmalıdır. Dolayısıyla, A dizisel olarak kapalıdır. Aynı mantık F-açık kümeler için de geçerlidir.

(4) $F = F_f$ olduğunda, F-yakınsama klasik yakınsamaya indirgenir. Bu durumda F-dizisel uzaylar klasik dizisel uzaylara karşılık gelir.

(5) $F = F_\delta$ istatistiksel filtre olduğunda, F-yakınsama istatistiksel yakınsama anlamına gelir. Dolayısıyla, F-dizisel uzaylar istatistiksel olarak dizisel uzaylardır. □

Lemma 2.2.3. $F \subseteq G$ $\mathbb{N}$ üzerinde iki filtre ve X bir düzgün uzay olsun. Eğer $U \subseteq X$ kümesi G-açık ise, o zaman U aynı zamanda F-açıktır.
İspat. U G-açık olsun. O zaman $X\backslash U$ G-kapalıdır. $(x_n) \subseteq X\backslash U$ ve $x_n \xrightarrow{F} x \in X$ ise, $F \subseteq G$ olduğundan $x_n \xrightarrow{G} x$ da geçerlidir. Bu nedenle $x \in X\backslash U$ ve U F-açıktır. □

Sonuç 2.2.4. $F \subseteq G$ $\mathbb{N}$ üzerinde iki filtre olsun. Eğer bir düzgün uzay X F-dizisel ise, o zaman X aynı zamanda G-diziseldir.

Sonuç 2.2.5. $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ $\mathbb{N}$ üzerinde bir filtre ailesi ve X bir düzgün uzay olsun. Eğer $U \subseteq X$ kümesi bazı $\alpha \in A$ için F_α-açık ise, o zaman $U \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha$-açıktır.

Lemma 2.2.6. F, $\mathbb{N}$ üzerinde bir filtre olsun. X bir düzgün uzay ve $A \subseteq X$ için aşağıdakiler eşdeğerdir:

1. A, F-açıktır.
2. Her $(x_n) \subseteq X$ dizisi için $x_n \xrightarrow{F} x \in A$ ise, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\} \in F$ koşulu sağlanır.

Teorem 2.2.7. Fréchet filtresini içeren her filtre F için, her dizisel uzay aynı zamanda F-dizisel uzaydır.
İspat. X bir dizisel uzay ve F Fréchet filtresini içeren bir filtre olsun. $A \subseteq X$ ve $x \in \overline{A}$ varsayalım. X dizisel olduğundan, $(x_n) \subseteq A$ dizisi x'e klasik anlamda yakınsar. Klasik yakınsamada her x komşuluğu için $\{n : x_n \notin U\}$ sonlu olduğundan, bu küme Fréchet filtresini içeren her filtreye dahildir. Böylece (x_n) F-yakınsamasıyla da x'e yakınsar. O hâlde x, A'nın F-kapanışına dahildir. Bu da X'in F-dizisel olduğunu gösterir. □

Örnek 2.2.8. $\mathbb{N}$ üzerinde

$$F = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ sonsuz ve sonsuz sayıda çift sayı içeriyor}\}$$

şeklinde tanımlanan bir filtre düşünelim. Bu filtre Fréchet filtresini içermez.

$X = \mathbb{R}$ ve (x_n) dizisini

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{eğer } n \text{ çiftse,} \\ 1, & \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi klasik anlamda 0'a yakınsamaz, çünkü tek terimler 1'e eşittir.

Şimdi (x_n)'nin 0'a F-yakınsadığını varsayalım. Örneğin 0'ın komşuluğu olarak $(-1/2,1/2)$ alınırsa,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin (-1/2,1/2)\} = \{\text{tek } n\}$$

elde edilir. Ancak bu küme F'de değildir çünkü F yalnızca sonsuz sayıda çift sayı içeren kümeleri içerir. Dolayısıyla (x_n) F-yakınsamaz.

Bu örnek gösterir ki F Fréchet filtresini içermiyorsa, her dizisel uzay F-dizisel olmayabilir.

Teorem 2.2.9. Her F-dizisel uzay, F-açık (sırasıyla F-kapalı) altuzaylara göre kalıtsaldır.

İspat. X F-dizisel bir uzay ve $Y \subseteq X$ F-açık bir altuzay olsun. Y'nin X'ten kalıtılan düzgün yapısıyla F-dizisel olduğunu gösterelim.

$A \subseteq Y$ ve $x \in \overline{A}^Y$ olsun. x'in Y'deki her F-komşuluğu için A içinde x'e F-yakınsayan bir (x_n) dizisi vardır.

$Y \subseteq X$ olduğundan, Y'deki komşuluklar X'teki komşuluklarla kesişim şeklindedir. Bu nedenle (x_n) dizisi X'te de x'e F-yakınsar. X F-dizisel olduğundan, $x \in A$ olur

ve Y F-diziseldir. Aynı argüman F-kapalı altuzaylar için de geçerlidir. □

3. F-Sürekli Fonksiyonlar

Bu bölümde F-sürekli fonksiyonları inceliyor ve sürekli, F-sürekli ve dizisel sürekli fonksiyonlar arasındaki ilişkileri tartışıyoruz.

Tanım 3.1. F, $\mathbb{N}$ üzerinde bir filtredir ve X, Y düzgün uzaylar olsun. $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

- f fonksiyonu, her $(x_n: n \in \mathbb{N}) \subseteq X$ dizisi için $x_n \xrightarrow{F} x$ olduğunda $f(x_n) \xrightarrow{F} f(x)$ olacak şekilde F-yakınsamayı *korur* denir.
- f fonksiyonuna, her F-açık $U \subseteq Y$ kümesi için ters görüntüsü $f^{-1}(U)$ kümesi X içinde F-açık olacak şekilde *F-sürekli* denir.

Bir fonksiyon $f: X \to Y$'nin F-sürekli olması, ancak ve ancak her F-kapalı $A \subseteq Y$ kümesi için $f^{-1}(A)$ kümesinin X içinde F-kapalı olmasıyla eşdeğerdir.

Teorem 3.2. X, Y düzgün uzaylar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

1. Eğer f sürekli ise, F-yakınsamayı korur.
2. Eğer f F-yakınsamayı korursa, o zaman F-süreklidir.

İspat. (1) f fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım ve $(x_n: n \in \mathbb{N})$ dizisi $x_n \xrightarrow{F} x \in X$ olacak şekilde X içinde bir dizi olsun. Y içinde $f(x)$ noktasının herhangi bir açık komşuluğu U alalım. f sürekli olduğundan, $f^{-1}(U)$ kümesi x noktasının açık komşuluğudur. O hâlde

$$\{n \in \mathbb{N}: x_n \notin f^{-1}(U)\} \in F.$$

Dikkat edelim ki

$$\{n \in \mathbb{N}: f(x_n) \notin U\} = \{n \in \mathbb{N}: x_n \notin f^{-1}(U)\}.$$

Dolayısıyla

$$\{n \in \mathbb{N}: f(x_n) \notin U\} \in F,$$

yani $f(x_n) \xrightarrow{F} f(x)$ olur. Bu nedenle f, F-yakınsamayı korur.

(2) f fonksiyonu F-yakınsamayı korusun ve $A \subseteq Y$ kümesi F-kapalı olsun. $(x_n: n \in \mathbb{N}) \subseteq f^{-1}(A)$ dizisi $x_n \xrightarrow{F} x \in X$ olacak şekilde alınsın. Her n için $f(x_n) \in A$ ve A F-kapalı olduğundan, $f(x) \in A$ elde edilir. O hâlde $x \in f^{-1}(A)$ ve bu nedenle $f^{-1}(A)$ kümesi F-kapalıdır. Böylece f, F-sürekli olur. □

Örnek 3.3. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Bu fonksiyon, klasik anlamda her noktada süreksizdir. Şimdi, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı, yalnızca irrasyonel değerlere karşılık gelen indeks kümelerini içeren bir filtre F tanımlayalım. Bu filtre, özellikle irrasyonel değerlerin baskın olduğu dizileri tercih eder. Şimdi, (x_n) dizisinin yalnızca irrasyonel terimlerden oluştuğunu ve $x_n \to x$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $f(x_n) = 0$ olur ve dolayısıyla $f(x_n) \to 0 = f(x)$ sağlanır. Çünkü rasyonel terimlerin oluşturduğu indeks kümesi yoğunluğu sıfır olan bir altkümeyi oluşturduğundan, bu terimler filtre tarafından "önemsiz" kabul edilir. Bu nedenle, f fonksiyonu klasik anlamda süreksiz olsa da, tanımlanan filtre F altında F-sürekli olur. Bu durum, Teorem 3.2'nin tersinin genel olarak geçerli olmadığını göstermektedir.

Teorem 3.4. F, $\mathbb{N}$ üzerinde bir ultrafilter ve X, Y düzgün uzaylar olsun. O hâlde $f: X \to Y$ fonksiyonu F-sürekli ise ve ancak F-yakınsayan dizileri koruyorsa F-sürekli olur.

İspat. f fonksiyonu F-sürekli olsun ve (x_n) dizisi $x_n \xrightarrow{F} x$ olacak şekilde X içinde olsun. O hâlde

$$f(x_n) \xrightarrow{F} f(x)$$

olduğunu göstermek istiyoruz. $f(x)$ noktasının Y içinde bir açık komşuluğu U alalım. f F-sürekli olduğundan, $f^{-1}(U)$ kümesi X içinde F-açıktır. F-açıklık tanımına göre

$$\{n \in \mathbb{N}: x_n \in f^{-1}(U)\} \in F.$$

Ama

$$\{n \in \mathbb{N}: f(x_n) \in U\} = \{n \in \mathbb{N}: x_n \in f^{-1}(U)\} \in F.$$

Dolayısıyla tanıma göre

$$f(x_n) \xrightarrow{F} f(x)$$

olur. Tersi yönde de, F-süreklilik, F-açık kümelerin ters görüntüleriyle karakterize edildiğinden benzer biçimde elde edilir. Yani f, F-yakınsayan dizileri koruyorsa ve ancak o zaman F-süreklidir. □

Teorem 3.5. X bir F-dizisel uzay ve X, Y düzgün uzaylar olsun. $f: X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

1. f süreklidir.
2. f, F-yakınsamayı korur.
3. f, F-süreklidir.

İspat. Teorem 3.2'ye göre $(1) \Rightarrow (2)$.
$(2) \Rightarrow (1)$: Aksini varsayalım, yani f sürekli olmasın. O hâlde $f^{-1}(U)$ açık olmayan bir $U \subseteq Y$ açık kümesi vardır. X F-dizisel bir uzay olduğundan, $f^{-1}(U)$ kümesi de F-dizisel olarak açık değildir. Bu nedenle $X\backslash f^{-1}(U)$ içinde

olup F-yakınsayarak $f^{-1}(U)$ içinde bir noktaya giden bir (x_n) dizisi vardır. Ancak $\big(f(x_n)\big)$ dizisi $Y\backslash U$ kapalı kümesinde kalır ve $f(y)$ noktasına F-yakınsayamaz. Bu, f'nin F-yakınsamayı koruduğu varsayımıyla çelişir. Öyleyse f sürekli olmalıdır.

Son olarak, Teorem 3.2'ye göre $(3) \Rightarrow (1)$ kalır. f F-sürekli ve $F \subseteq Y$ herhangi bir kapalı küme olsun. Bu durumda F, Y içinde F-kapalıdır. f F-sürekli olduğundan, $f^{-1}(F)$ X içinde F-kapalıdır. X F-dizisel olduğundan, her F-kapalı küme kapalıdır. O hâlde $f^{-1}(F)$ kapalıdır ve bu da f'nin sürekli olduğunu gösterir. □

Sonuç 3.6. X bir F-dizisel uzay ve X, Y düzgün uzaylar olsun. $f: X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

1. f süreklidir.
2. f F-yakınsamayı korur.
3. f F-süreklidir.
4. f dizisel süreklidir.

İspat. Her dizisel uzayın, F Fréchet filtresi olduğunda F-dizisel bir uzay olduğu bilinir. Ayrıca dizisel uzaylarda süreklilik ile dizisel süreklilik çakışır (Boone ve Siwiec 1976). Bu nedenle eşdeğerlikler doğrudan elde edilir. □

4. Sonuç ve Gelecek Çalışmalar

Bu çalışmada, filtreler aracılığıyla tanımlanan genelleştirilmiş bir yakınsaklık yöntemi olan F-yakınsaklık kavramı, düzgün uzaylar bağlamında ele alınmıştır. Bu çerçevede tanımlanan F-dizisel uzaylar ve F-süreklilik kavramları ile klasik yakınsaklık ve süreklilik anlayışları filtre tabanlı bir yaklaşımla genişletilmiştir. Ayrıca, bu yapıların istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık gibi diğer genelleştirilmiş yöntemlerle olan ilişkileri de gösterilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, topolojik olmayan ya da zayıf topolojik yapılar için de geçerli olabilecek daha esnek bir yakınsaklık kuramının geliştirilebileceğini göstermektedir. Bu sayede, filtre temelli yapıların klasik dizisel yöntemlerin ötesine geçen bir kuramsal altyapı sunduğu anlaşılmıştır.

Gelecekteki çalışmalar, bu yaklaşımın ağlar (nets) ve filtre temelli Cauchy dizileri bağlamında daha geniş biçimde ele alınmasını içerebilir. Ayrıca, filtre temelli yakınsaklık kavramlarının bornolojik yapılar veya diğer fonksiyon uzayları üzerindeki etkilerinin araştırılması, kuramsal katkı sağlayabilir. Bunun yanında, filtreler aracılığıyla tanımlanan fonksiyon dizilerinin yakınsaklık davranışlarının incelenmesi ve klasik anlamda fonksiyonel limit kavramlarıyla olan ilişkilerinin ortaya konması da anlamlı olacaktır. Bu tür çalışmalar, filtre tabanlı yaklaşımın hem kuramsal derinliğini artıracak hem de fonksiyon uzaylarında yeni uygulama alanları oluşturacaktır.

Etik Standartlar Bildirgesi
Yazar, tüm etik standartlara uyduğunu beyan eder.

Yazarlık Katkı Beyanı
Kuramsal çerçevenin oluşturulması, kavramların tanımlanması, teoremlerin geliştirilmesi ve ispatlanması, sonuçların analiz edilmesi ve makalenin yazımı dâhil olmak üzere tüm araştırma İsmail Osmanoğlu tarafından gerçekleştirilmiştir.

Çıkar Çatışması Beyanı
Yazarın, bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edeceği herhangi bir çıkar çatışması yoktur.

Verilerin Kullanılabilirliği
Bu çalışmada oluşturulan veya analiz edilen tüm veriler, yayımlanan makale içerisinde yer almaktadır.

5. Kaynaklar

Bilalov, B.T., Nazarova, T.Y., 2016. On statistical type convergence in uniform spaces, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **42**, 975-986.

Boone, J.R., Siwiec, F., 1976. Sequentially quotient mappings, *Czechoslov. Math. J.,* **26**, 174-182. https://doi.org/10.21136/CMJ.1976.101388

Bourbaki, N., 1989. General topology. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61701-0

Das, P., 2012. Some further results on ideal convergence in topological spaces, *Topol. Appl.*, **159**, 2621-2626. https://doi.org/10.1016/j.topol.2012.04.005

Das, P., Ghosal, S., 2011. When I-Cauchy nets in complete uniform spaces are I-convergent, *Topol. Appl.*, **158**, 1529-1533. https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.03.012

Das, P., Kocinac, Lj.D.R., Chandra, D., 2016. Some remarks on open covers and selection principles using ideals, *Topol. Appl.*, **202**, 183-193. https://doi.org/10.1016/j.topol.2016.01.003

Di Maio, G., Kocinac, L.D.R., 2008. Statistical convergence in topology, *Topol. Appl.*, **156**, 28-45. https://doi.org/10.1016/j.topol.2008.01.015

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.*, **2**, 241-244. https://doi.org/10.4064/cm-2-3-4-241-244

Kelley, J.L., 1975. General Topology. Springer, New York-Berlin.

Kostyrko, P., Macaj, M., Salat, T., Sleziak, M., 2005. I-convergence and extremal I-limit points, *Math. Slovaca*, **55**, 443-464.

Kostyrko, P., Salat, T., Wilczynski, W., 2000/2001. I-convergence, *Real Anal. Exch.*, **26**, 669-686.

Lahiri, B.K., Das, P., 2005. I and I*-convergence in topological spaces, *Math. Bohem.*, **130**(2), 153-160.

Lahiri, B.K., Das, P., 2007/2008. I and I-convergence of nets, *Real Anal. Exchange*, **33**, 431-442.

Steinhaus, H., Sur la, 1951. convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloq. Math.*, **2**, 73-74.

Zhou, X., Liu, L., Lin, S., 2020. On Topological Spaces Defined by I-Convergence, *Bull. Iran. Math. Soc.*, **46**, 675-692.